第 29 講　三角比・平面図形

1　三角形 ABC において AB＝3，BC＝$\sqrt{a}$，CA＝2，∠BAC＝θ とする．

(1)　$\cos\theta$ を a の式で表せ．また，a の値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC の面積が最大となるような a の値を求めよ．また，このときの外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ．

(3)　上の(2)が成り立つとき，三角形 ABC の外接円の弧 CA 上の点 D によってできる四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ．ただし，弧 AC 上には点 B がないものとする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1辺の長さが3の正四面体OABCにおいて，辺BCを1：2に内分する点をDとする．また，辺OC上に点Eをとり，CE＝tとする．

(1)　cos∠DAEをtを用いて表せ．

(2)　△ADEの面積が最小になるときのtの値とそのときの面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 三角錐 OABC において，

$$AB=2\sqrt{3},\ OA=OB=OC=AC=BC=\sqrt{7}$$

とする．このとき，三角錐 OABC の体積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　三角比・平面図形

［1］ 点Oを中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる3点A，B，Pがある．弦ABの長さを $\sqrt{3}a$ （$a>0$）とする．点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるとき，∠APB＝ アイ °である．また，点Pが円 C の周上を動くとき，△PABの面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}a^2$ である．

［2］ AB＝AC＝AD＝3，BC＝3，CD＝2，DB＝$\sqrt{5}$ の三角錐ABCDにおいて，△BCDに外接する円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{2}$ であり，この三角錐ABCDの体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{2}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　三角比・平面図形

1　三角形ABCにおいて $AB=3$，$BC=\sqrt{a}$，$CA=2$，$\angle BAC=\theta$ とする．

(1)　$\cos\theta$ を a の式で表せ．また，a の値の範囲を求めよ．

(2)　三角形ABCの面積が最大となるような a の値を求めよ．また，このときの外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ．

(3)　上の(2)が成り立つとき，三角形ABCの外接円の弧CA上の点Dによってできる四角形ABCDの面積の最大値を求めよ．ただし，弧AC上には点Bがないものとする．

(1)　余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{a})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{13-a}{12}$$

$0°<\theta<180°$ より　$-1<\cos\theta<1$

よって　$-1<\dfrac{13-a}{12}<1$　より　$-12<13-a<12$　　ゆえに　$\mathbf{1<a<25}$

(2)　三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin\theta=3\sin\theta$$

これが最大となるのは　$\sin\theta=1$　つまり　$\theta=90°$ のとき

このとき　$\cos\theta=0$　より　$\dfrac{13-a}{12}=0$　よって　$\mathbf{a=13}$

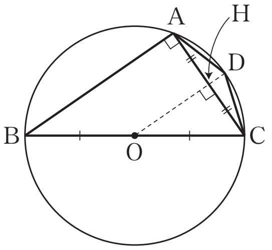
またこのとき，△ABCは辺BCを斜辺とする直角三角形となり，

△ABCの外接円の直径は辺BCとなる．よって　$R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(AB+BC+CA)$　より　$3=\dfrac{1}{2}r(3+\sqrt{13}+2)$

よって　$r=\dfrac{6}{5+\sqrt{13}}=\dfrac{6(5-\sqrt{13})}{25-13}=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

(3)　△ABCの面積は一定値3であることより，四角形ABCDの面積が最大となるのは△ACDの面積が最大となるときである．それは，△ACDの外接円（(2)の外接円に一致）の中心をOとすると，線分DOが弦ACの垂直二等分線となるときである．DOとACの交点をHとすると，



$DH=DO-HO$

中点連結定理より　$HO=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{3}{2}$

$$DH=DO-HO=R-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

よって四角形ABCDの面積の最大値は

$$3+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DH=3+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{13}-3}{2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

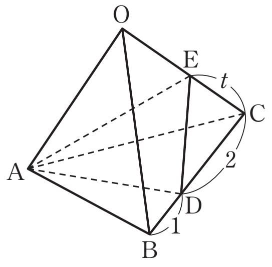
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1辺の長さが3の正四面体OABCにおいて，辺BCを1：2に内分する点をDとする．また，辺OC上に点Eをとり，CE＝tとする．

(1)　cos∠DAEをtを用いて表せ．

(2)　△ADEの面積が最小になるときのtの値とそのときの面積を求めよ．

(1)　△ABDで余弦定理より



$$AD^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=9+1-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=7$$

$$AD=\sqrt{7}$$

△ACEで余弦定理より

$$AE^2=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\cos60^\circ=9+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-3t+9$$

$$AE=\sqrt{t^2-3t+9}$$

△CDEで余弦定理より

$$DE^2=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\cos60^\circ=4+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-2t+4$$

$$DE=\sqrt{t^2-2t+4}$$

よって，△ADEで余弦定理より

$$\cos\angle DAE=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}=\boldsymbol{\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}}$$

(2)　$$\sin^2\angle DAE=1-\frac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}=\frac{28(t^2-3t+9)-(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}=\frac{27t^2-60t+108}{28(t^2-3t+9)}$$

$$\sin\angle DAE=\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

よって　$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}$$

$27t^2-60t+108=27\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{3}$　$(0\leqq t\leqq3)$ より，

△ADEの面積が最小となるのは $\boldsymbol{t=\frac{10}{9}}$ のときで，そのときの面積は

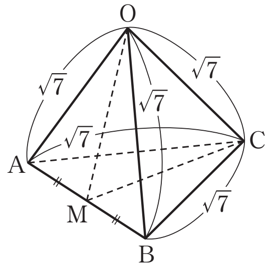
$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{224}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{3}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　三角錐 OABC において，

$$AB=2\sqrt{3},\ OA=OB=OC=AC=BC=\sqrt{7}$$

とする．このとき，三角錐 OABC の体積を求めよ．



辺 AB の中点を M とすると，

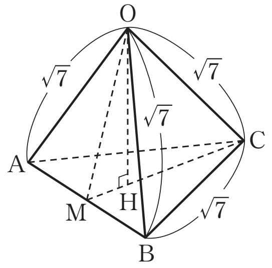
△OAB，△CAB は 3 辺の長さが $\sqrt{7}$，$\sqrt{7}$，$2\sqrt{3}$ の

二等辺三角形より

$OM=CM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{7-3}=2$

△OMC で余弦定理を用いて　$\cos\angle OMC=\dfrac{4+4-7}{2\cdot2\cdot2}=\dfrac{1}{8}$

よって　$\sin\angle OMC=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$



点 O から平面 CAB に垂線 OH を下ろすと，図形の対称性より

H は線分 CM 上にある．

よって，$OH=OM\sin\angle OMC=2\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

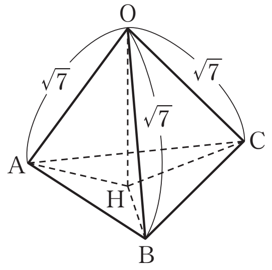
したがって，三角錐 OABC の体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle CAB\cdot OH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{2}}$

(別解)　点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，

△OAH≡△OBH≡△OCH　より　AH＝BH＝CH

よって H は △ABC の外接円の中心である．

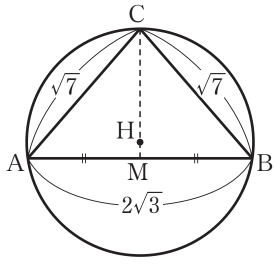


辺 AB の中点を M とすると

$\sin\angle CAB=\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

よって △ABC の外接円の半径を R とすると

$2R=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}=\dfrac{\sqrt{7}}{\dfrac{2}{\sqrt{7}}}=\dfrac{7}{2}$　より　$AH=R=\dfrac{7}{4}$



$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{7-\dfrac{49}{16}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

したがって，三角錐 OABC の体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\times\dfrac{3\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　三角比・平面図形

［1］　点Oを中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる3点A，B，Pがある．弦ABの長さを $\sqrt{3}a$ $(a>0)$ とする．点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるとき，$\angle$APB＝［アイ］°である．また，点Pが円 C の周上を動くとき，△PABの面積の最大値は $\dfrac{\text{ウ}\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}a^2$ である．

［2］　AB＝AC＝AD＝3，BC＝3，CD＝2，DB＝$\sqrt{5}$ の三角錐ABCDにおいて，△BCDに外接する円の半径は $\dfrac{\text{カ}}{2}$ であり，この三角錐ABCDの体積は $\dfrac{\sqrt{\text{キク}}}{2}$ である．

解答例

［1］　正弦定理より　$\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=2a$　　$\sin\angle APB=\dfrac{\sqrt{3}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるので $0°<\angle APB<90°$

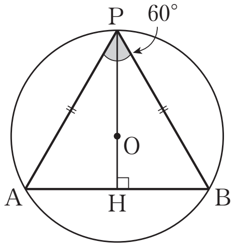
よって　$\angle APB=\mathbf{60}°$

点Pから直線ABに下ろした垂線の足をHとすると，△PABの面積が最大となるのはPHが円 C の中心Oを通るとき．

このとき対称性より　PA＝PB

よって△APBは1辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形となる．

したがって求める最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{3}a\cdot\sin 60°=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}a^2$



［2］　$BC^2=CD^2+DB^2$ より△BCDは $\angle D=90°$ の直角三角形．

よって△BCDの外接円の半径は　$\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{\mathbf{3}}{2}$

また，外接円の中心をOとすると△ABCはAB＝AC＝BC＝3の正三角形で，OはBCの中点だから，

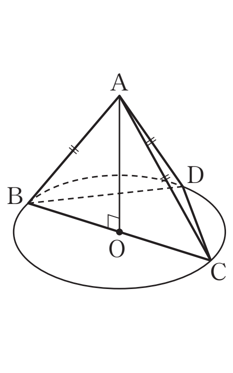
$\angle AOB=\angle AOC=90°$，$AO=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

また，△AOB≡△AOC≡△AODより $\angle AOD=90°$

よってAOは三角錐ABCDの高さである．

したがって三角錐ABCDの体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times AO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{2}$



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。